Vybrané partie z matematickej analýzy 2

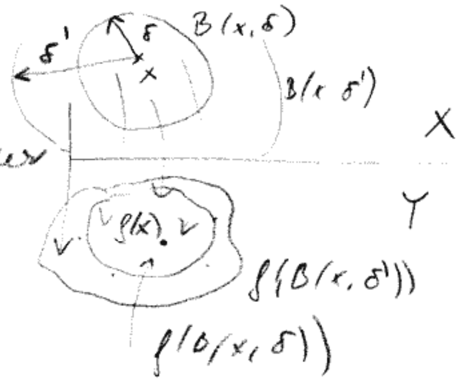
31.3.2005

$(X,\varrho), (Y,\sigma)$ - metrické priestory

$f: X \to Y$ - nejaká funkcia

→ okolie bodu x: $B(x,\delta) = \{y \in X : \varrho(y,x) < \delta\} \subset X$

$$f(B(x,\delta)) = \{z \in Y : \exists_{y \in B(x,\delta)}\ z = f(y)\} \subset Y$$



diam $f(B(x,\delta)) = d_\delta$ → číslo závisiace od δ

opakovanie: $M \subset Y$

↳ diam $M = \sup_{x,y \in M}\{\sigma(x,y)\}$] čo je to diameter

$\boxed{\text{Def.}}$

$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0}\{d_\delta\}$

↳ oscilácia funkcie f v bode x

! ak $\delta < \delta'$ ⇒ $d_\delta \le d_{\delta'}$

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0}\{d_\delta\} = \lim_{\delta\to0^+} d_\delta$$

príklad: Dirichletova funkcia (v každom bode nespojitá)

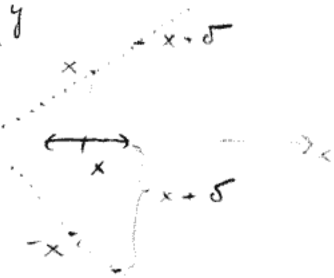
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

δ-okolie bodu x

$f(B(x,\delta)) = \{0,1\}$ (lebo v $B(x,\delta)$ sú určite iracionálne aj racionálne čísla)

diam $f(B(x,\delta)) = 1 = d_\delta$ pre ľubovoľné δ

$\omega_f(x) = \inf d_\delta = \underline{\underline{1}}$ (oscilácia je vždy 1)



príklad: $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

diam $f(B(x,\delta)) = 2|x| + 2\delta = 2(|x| + \delta) = d_\delta$

$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to0^+} d_\delta = \underline{\underline{2|x|}}$ → teda vlastne platí pre $\forall x \in \mathbb{R}$

pre $x = 0$: $\omega_f(0) = 0$

↳ jediný bod spojitosti tejto funkcie

$\boxed{\text{Veta}}$ Nech $f: X \to Y$. Potom $x \in X$ je bodom spojitosti funkcie $f \iff \omega_f(x) = 0$.

dôkaz: $\boxed{\Rightarrow}$ x je bod spojitosti $\Rightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \iff$

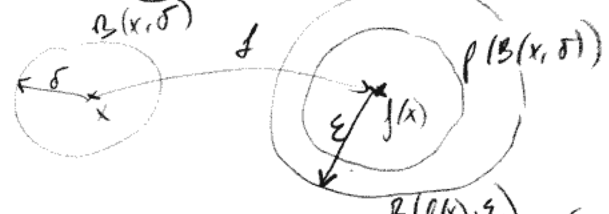
Cauchyho def. spojitosti $\iff f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$

$$d_\delta = \operatorname{diam} f(B(x,\delta)) \leq \operatorname{diam} B(f(x),\varepsilon) \leq 2\varepsilon$$

$\operatorname{diam} B(z,\varepsilon)$: $r(y,y') \leq \underbrace{r(z,y)}_{<\varepsilon} + \underbrace{r(z,y')}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$] preto platí

$y, y' \in B(z,\varepsilon)$

$\Rightarrow \omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} d_\delta = 0 \quad (2\varepsilon \to 0)$, $\delta \to 0$



$\boxed{\Leftarrow}$ nech $\omega_f(x) = 0 \quad \varepsilon > 0$

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} d_\delta = 0$$

$\exists \delta > 0 \; d_\delta < \varepsilon \quad \rightarrow \operatorname{diam} f(B(x,\delta)) < \varepsilon$

$\sup r(f(y), f(y')) < \varepsilon$ a nech $y' = x$

$f(y), f(y') \in f(B(x,\delta))$

$\rightarrow \sup r(f(y), f(x)) < \varepsilon \rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$

$y \in B(x,\delta)$

platí spojitosť $\Leftarrow$ ■

príklad:

Riemannova funkcia: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \; (p,q) = 1 \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$

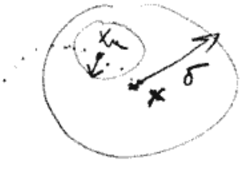
je spojitá v iracionálnych číslach

$\boxed{\text{Lema}}$: Pre každé $\varepsilon > 0$ je množina $\overbrace{\{x \in X : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}}^{A_\varepsilon}$ uzavretá.

dôkaz: M-uzavretá $\iff$ ak s každou konvergentnou postupnosťou obsahuje aj jej limitu

$A_\varepsilon = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ + chceme ukázať, že je uzavretá:

$x_n \to x$, $x_n \in A_\varepsilon$ (ukážeme, že aj $x \in A_\varepsilon$)



$B(x,\delta) \to$ okolie

$\rightarrow$ pre $\forall \delta$ nájdeme taký index n_0: že pre $\forall n \geq n_0$: $x_n \in B(x,\delta)$

$B(x_n,\eta) \subset B(x,\delta) \quad \eta \to$ okolie platí:

$$f(B(x,\delta)) \supset f(B(x_n,\eta))$$

$$\operatorname{diam} f(B(x,\delta)) = \underline{d_\delta} \geq \operatorname{diam} f(B(x_n,\eta)) = \underline{\underline{d_\eta(x_n)}} \geq \varepsilon$$

$$x_n \in A_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{\omega_f(x_n)}_{= \inf d_\eta(x_n)} \geq \varepsilon$$

$$\omega_f(x) = \inf d_\delta \geq \varepsilon \Rightarrow \underline{x \in A_\varepsilon} \quad \blacksquare$$

<u>označenie:</u>

C_f – množina $\forall$ bodov spojitosti f (oscilácia je nulová)

D_f – množina $\forall$ bodov nespojitosti f

$$D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \omega_f(x) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

↳ oscilácia je kladná

$\boxed{\subset}$ $x \in D_f \Rightarrow \omega_f(x) > 0 \Rightarrow \exists_n \ \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}$

$\boxed{\supset}$ jasné

$\boxed{\text{Lema}}$: Pre ľubovoľné $f: X \to Y$: $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : \omega_f(x) \geq \tfrac{1}{n}\}}_{A_{\frac{1}{n}}}$.

dôkaz: dokázané hore $\blacksquare$

$\boxed{\text{Veta}}$: Nech $f: X \to Y$ (X, Y – metrické priestory). Potom množina C_f je množinou typu G_δ a obsahuje všetky izolované body X.

$\Rightarrow C_f = \bigcap_{1}^{\infty} G_n$ G_n – otvorená

platí: <u>izolovaný bod x</u>: $\exists \delta$: $B(x,\delta) = \{x\}$ (okolie obsahuje len bod x)

a potom platí: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y \in B(x,\delta)} : f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ daný bod x je bodom spojitosti

(funkcia je v izolovanom bode triviálne spojitá)

A je typu G_δ, ak:
$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n – otvorená

dôkaz: $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$, $A_{\frac{1}{n}}$ – uzavretá

$A_\varepsilon = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$

$$X \setminus D_f = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overbrace{\underbrace{(X \setminus A_{\frac{1}{n}})}_{\text{uzavretá}}}^{\text{otvorená}} \Rightarrow X \setminus D_f \text{ je prienik otvorených}$$

množín $\Rightarrow X \setminus D_f = C_f$ je typu G_δ

$\blacksquare$

Hádka: existuje funkcia spojitá v racionálnych a nespojitá v iracionálnych ??
(neexistuje a ideme to dokázať)

→ chceme ukázať, že Q nie je typu G_δ:

$Q \subset R$ (Q je typu F_σ, $R \setminus Q$ je typu G_δ)

$R = Q \cup (R \setminus Q)$ ↳ hustá, je

↓ je 2. Bairovej kategórie → 1. B. kategórie (lebo $Q = \bigcup_{1}^{\infty} \{x\}$) ↓ riedka

doplnenie uzavretej

sporom: nech Q je typu G_δ ⇒ $R \setminus Q$ je typu F_σ, je hustá ⇒

$Q = \bigcap G_n$ prienik otvorených ⇒ $R \setminus Q$ – 1. Bairovej kategórie

$R \setminus Q = R \setminus \bigcap G_n =$ teda potom: $R = Q \cup (R \setminus Q)$ → a to

$= \bigcup (R \setminus G_n) \to R \setminus Q \to F_\sigma$ 2.   1.   1.   nemôže nastať,

uzavretá   teda Q nie je typu G_δ ⇒ neexistuje taká funkcia. ■

Hádka: ak máme v X množinu G_δ a obsahuje izolované body X, vieme nájsť funkciu f takú, že G_δ je jej C_f ???

odp: $M \subset X$
↳ typu G_δ a obsahuje izolované body X
⇓
$\exists f : C_f = M$.

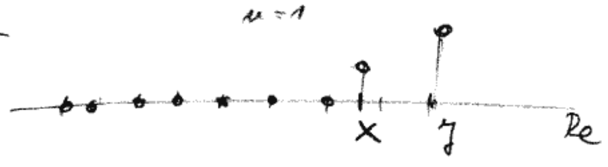
D_f – je typu F_σ (A – F_σ ak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ → uzavreté)
C_f – je typu G_δ

príklad:
$A \subset R$
↳ spočítateľná.

Chceme nájsť funkciu f, aby $D_f = A$: ($f : R \to R$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

A – spoč. ⇒ $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ (prostá postupnosť)

nech $f(x) = \sum_{x_n < x} \frac{1}{2^n}$



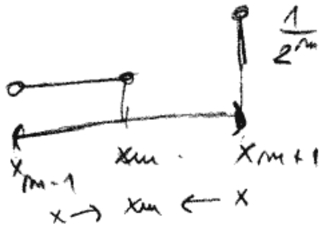
$x < y \Rightarrow f(x) \le f(y) \Rightarrow f$ – monotónna.

ukážeme, že jej body nespojitosti sú $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$:

$x \in A \to x = x_n$ $y \in A \cdot y > x \to f(y) > f(x)$

$f(x_n) = \sum_{x_k < x_n} \frac{1}{2^n}$ ↳ tu pribudol minimálne člen $\frac{1}{2^n}$ →

$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \frac{1}{2^m} > 0$



$\forall x \in (x_{m-1}, x_m): f(x) = \sum_{n=1,\dots,m-1} \frac{1}{2^n} = \lim_{x \to x_m^-} f(x)$

$\forall x \in (x_m, x_{m+1}): f(x) = \sum_{n=1,\dots,m} \frac{1}{2^n} = \lim_{x \to x_m^+} f(x)$

? $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_m^+} f(x) \\ \exists \lim_{x \to x_m^-} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_m^+} f(x) > \underline{f(x_m)} = \lim_{x \to x_m^-} f(x)$

$\Rightarrow x$ je bod nespojitosti

$\Rightarrow$ platí: $x \in A \Rightarrow x \in D_f$ $\underline{(A \subset D_f)}$

opačne: nech $x \notin A$, $\varepsilon > 0$ - ľub.

$x \in D_f \Rightarrow x \in A$

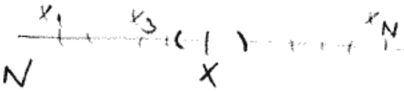
$x \notin A \Rightarrow x \notin D_f$

nájdeme také okolie δ, že $f(z) - f(y) < \varepsilon$

$y, z \in B(x, \delta) \Rightarrow |f(z) - f(y)| < \varepsilon$?

$N: \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$

$x_1, \dots, x_N : B(x, \delta) \not\ni x_i$, $i = 1, \dots, N$

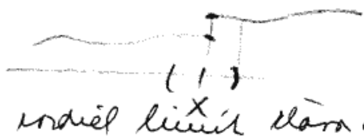


môžeme nájsť také okolie x, že žiadne z $x_1, \dots, x_N$ tam nebude

$\underbrace{f(z) - f(y)}$ $< \frac{\varepsilon}{2}$

lebo rozdiel obsahuje len nejaké členy z $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$

ledaže $x \in D_f \Rightarrow$



zvolíme $\varepsilon <$ rozdiel limít zľava a sprava ...

zopakovanie:

7.4.2005

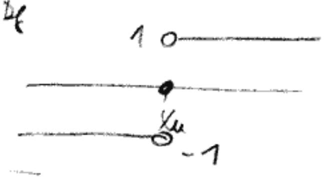
$D_f = \{x_1, x_2, \dots\}$ → množina bodov nespojitosti

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → hľadáme je takú, aby D_f bola jej množina bodov nespojitosti

$$f(x) = \sum_{n: x_n < x} \frac{1}{2^n}$$ → táto funkcia to splní (a je aj monotónna)

→ $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ → chceme zostrojiť nemonotónnu funkciu s predpísanou množinou D_f ($x_n \in D_f$)

konštrukcia: pomocná funkcia $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x > x_n \\ 0 & x = x_n \\ -1 & x < x_n \end{cases}$



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f_n(x)$$ → táto f už musí byť naša hľadaná funkcia

[Weierstrassov kritérium rovnomernej konvergencie (WK):

$|g_n(x)| \leq c_n \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ konverguje]

zoberme si $x \neq x_n$: $g_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot f_n(x) \Rightarrow |g_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_1 \frac{1}{2^n} \cdot f_n(x) \to \ \Rightarrow \sum_1 \frac{1}{2^n} \cdot f_n(x) = f(x)$

⇒ môžeme aplikovať WK: pre $x \neq x_n$: $f(x)$ - spojitá

$\exists\, x = x_m$: $f(x) = \underbrace{\frac{1}{2^m} \cdot f_m(x)}_{\text{nespojitá v } x_m} + \underbrace{\sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot f_k(x)}_{\text{tam sú všetky sp. funkcie}}$

skúmame na $B(x, \delta)$ malé okolie ⇒

⇒ $f(x)$ je súčet spojitej a nespojitej ⇒

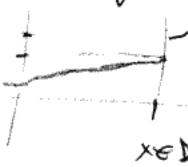
⇒ $f(x)$ je nespojitá v x_n → neobsahuje x_i ($i = 1, \dots$)

Veta Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónna. Potom množina D_f všetkých jej bodov nespojitosti je spočítateľná.

Dôkaz: $x \in \mathbb{R}$ - ľub. bod, nech f je neklesajúca (pre nerastúcu - analogicky)

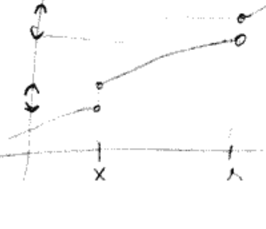
$\exists \lim_{t \to x^-} f(t) \leq \exists \lim_{t \to x^+} f(t)$ (lebo f-neklesajúca)

ak $x \in D_f \Rightarrow \lim_{t \to x^-} f(t) < \lim_{t \to x^+} f(t)$



$\Rightarrow x \mapsto \left(\lim_{t \to x^-} f(t), \lim_{t \to x^+} f(t)\right)$

k x priradíme takýto interval



pre 2 rôzne body $x, y \in D_f$ sú dané intervaly disjunktné (zrejmé monot.)

$\to x \mapsto I_x$. ak $x \neq y \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$

$\to$ intervalov I_x je spočítateľne veľa ($\forall I_x \exists q^x \in \mathbb{Q}$, $I_x \cap I_y = \emptyset$)

↳ racionálne čísla $\Downarrow$

intervalov I_x je spočítateľne veľa $\Leftarrow$ $\mathbb{Q}$ - spočítateľná množina $\Leftarrow q^x \neq q^y$

$\Downarrow$

bodov nespojitosti je spočítateľne veľa. ■

$f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ (zoberieme si grupu $\forall$ funkcií, priradíme $c.f = \{c.f(x)\ x \in \langle a,b \rangle\}$ $\Rightarrow$ lineárny priestor vektorov)

$\mathcal{F} = \{f \mid f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}\}$
$C = \{f \mid f \in \mathcal{F}, f - \text{spojitá}\}$ $\Big\} \Rightarrow C \subset \mathcal{F}$

$M \subset L$ ↳ lineárny priestor (M môže a nemusí byť podpriestorom) ↑ ak nie je, zoberieme si najmenší ľub, ktorý je M

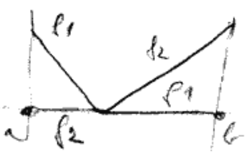
$[M]$ - podpriestor generovaný M (existuje vždy)

$\to$ zoberieme si systém podpriestorov obsahujúcich M a urobíme ich prienik $\to$ $\to$ dostaneme $[M]$ – ten je najmenší ľub, ktorý obsahuje M

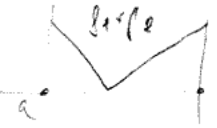
m - monotónne funkcie: $m = \{f \mid f \in \mathcal{F}, f - \text{monotónna}\}$ $\quad m \subset \mathcal{F}$

$\to$ je m podpriestor $\mathcal{F}$? (nie je!)

m - nie je uzavreté na súčet



$f_1 + f_2$ – nie je monotónna:



$\to$ ako teda vyzerá $[m]$?

riešenie: delíme interval $\langle a,b \rangle$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $\to P$ (delenie intervalu $\langle a,b \rangle$)

P - systém $\forall$ delení $\langle a,b \rangle$

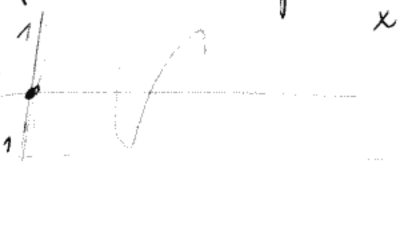
! $V(P,f) = \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ $\to$ vo všeobecnosti (hovorí o tom, ako sa naša funkcia f mení)

ak f - monotónna (neklesajúca) $\Rightarrow V(P,f) = f(b) - f(a)$

↳ o koľko funkcia narastie od a po b

!! $\underbrace{\operatorname{Var}_a^b f}_{\text{variácia } f \text{ na intervale } \langle a,b \rangle} = \sup_{P \in \mathcal{P}} V(P,f)$ $\to$ variácia môže byť konečná aj nekonečná:

$f: \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R}$: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(0) = 0$



nekonečne veľa oscilácií

f má nekonečnú variáciu na $\langle 0,1 \rangle$

$\operatorname{Var}_a^b(f) = \sup\limits_{P\in\mathcal{P}} V(P,f) < +\infty$ → konečná variácia

→ $BV(a,b) = \{f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}: \operatorname{Var}_a^b(f) < +\infty\}$ → systém funkcií s konečnou variáciou

$\boxed{\text{Veta}}$ Nech $f \in BV(a,b)$. Potom je f rozdielom 2 neklesajúcich funkcií.

dôkaz: $f \in BV(a,b)$. definujeme funkciu: $T(x) = \operatorname{Var}_a^x(f)$

$x \in (a,b)$ → nezáporná funkcia

chceme ukázať, že ak: $y > x \Rightarrow T(y) - T(x) = \operatorname{Var}_x^y(f)$

$\operatorname{Var}_a^y(f)$ → zoberieme si delenie $P = \{x_0 < x_1 < \dots < \underset{=x}{x_k} < \dots < x_n = y\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{\operatorname{Var}_a^y(f) = \sup} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{1.\Sigma} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|}_{2.\Sigma} \le \operatorname{Var}_a^x(f) + \operatorname{Var}_x^y(f)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}_a^x(f) = \sup \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\operatorname{Var}_x^y(f) = \sup \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

pevné čísla, ktoré nezávisia od delenia P

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{Var}_a^y(f) \le \operatorname{Var}_a^x(f) + \operatorname{Var}_x^y(f)}$$

zvolíme: $\varepsilon > 0$, utvoríme čísla: $\operatorname{Var}_a^x(f) - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \operatorname{Var}_a^x(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$ (existuje také delenie P, že to platí)

$$\sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \operatorname{Var}_x^y(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \operatorname{Var}_a^x(f) + \operatorname{Var}_x^y(f) - \varepsilon$$

$\sup(\ \downarrow\ ) = \operatorname{Var}_a^y(f) > \operatorname{Var}_a^x(f) + \operatorname{Var}_x^y(f) - \varepsilon$ pre $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rightarrow \boxed{\operatorname{Var}_a^y(f) \ge \operatorname{Var}_a^x(f) + \operatorname{Var}_x^y(f)} \quad \square$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Var}_a^y(f) = \operatorname{Var}_a^x(f) + \operatorname{Var}_x^y(f)$$

$$T(y) - T(x) = \operatorname{Var}_x^y(f)$$

$f = T - (T - f)$ $\to$ T je neklesajúca funkcia

Ukážeme, že $T-f$ je neklesajúca funkcia:

$\underline{x < y} \to \langle x, y \rangle$

$\operatorname{Var}_x^y(f) = T(y) - T(x) \geq \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{}\geq f(y) - f(x)$

je len ex. súčet v: $\operatorname{Var}_x^y(f) = \sup \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ (keď mám delenie, kde medzi x a y nemám iné deliace body).

$\Downarrow$

$T(y) - f(y) \geq T(x) - f(x)$

$\Downarrow$

$T-f$ je neklesajúca

$\Rightarrow \forall f \in BV\langle a,b\rangle$ sa dá vyjadriť ako $\underset{T}{f_1} - \underset{T-f}{f_2}$, f_1, f_2 – neklesajúce. ■

$\boxed{\text{Veta}}$: Nech $M = \{ f \mid f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R},\ f \text{ – monotónna}\}$. Potom $[M] = BV\langle a,b\rangle$.

Dôkaz: $f_1, f_2 \in M \Rightarrow \cancel{f_1}\, f_2 \in M \Rightarrow f_1 - f_2 \in [M]$

ak $f_1, f_2 \in BV\langle a,b\rangle$:

$\to \underbrace{\operatorname{Var}_a^b(f_1+f_2)}_{\text{je konečné číslo}} \leq \operatorname{Var}_a^b(f_1) + \operatorname{Var}_a^b(f_2)$

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |f_1(x_i) + f_2(x_i) - f_1(x_{i-1}) - f_2(x_{i-1})| \leq \underbrace{\sup \sum_{i=1}^{n} |f_1(x_i) - f_1(x_{i-1})|}_{\operatorname{Var}_a^b(f_1)} + \underbrace{\sup \sum_{i=1}^{n} |f_2(x_i) - f_2(x_{i-1})|}_{\operatorname{Var}_a^b(f_2)}$$

$\to \operatorname{Var}_a^b(c \cdot f) = |c| \cdot \operatorname{Var}_a^b(f)$

$\Rightarrow BV\langle a,b\rangle$ je vektorový priestor $\Rightarrow [M] \subset \underbrace{BV\langle a,b\rangle}_{\text{lebo funkcie sú rozdiel 2 neklesajúcich}}$ ■

Obrátene naopak:

monotónne funkcie patria $BV\langle a,b\rangle$ + dajú sa napísať ako rozdiel 2 neklesajúcich a tie patria aj do $[M]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{BV\langle a,b\rangle \subset [M]}$ ■

kopírovanie:

14.4.2005

$f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| = V(P,f)$

$\mathrm{Var}_a^b f = \sup_{P\in\mathcal{P}} V(P,f)$ $\quad \to f = f_1 - f_2$ neklesajúce

dĺžka grafu: delenie: $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$(x_i, f(x_i))$

→ lomenou čiarou pospájam jednotlivé $f(x_i)$ $i=0,\dots,n$

$d_i = \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$

! $L(\overset{\text{delenie}}{P}, \underset{\text{funkcia}}{f}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$

→ dĺžka grafu závislá od delenia P

! $L(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L(P,f)$ → dĺžka krivky

Veta: Nech $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Potom dĺžka grafu funkcie f ($L(f)$) je konečná $\iff$ $\mathrm{Var}_a^b f < +\infty$.

$L(f) < \infty \iff \mathrm{Var}_a^b f < \infty$

dôkaz: $a>0,\ b>0 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le a+b$ → platí

$0 \le 2ab$

$a^2+b^2 \le a^2+2ab+b^2$

$a^2+b^2 \le (a+b)^2$

$\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$

$\sum |f(x_i)-f(x_{i-1})| \le L(P,f) \le \sum_{i=1}^{n} [\overbrace{(x_i-x_{i-1})}^{b-a} + |f(x_i)-f(x_{i-1})|]$

$\sum |f(x_i)-f(x_{i-1})| \le L(P,f) \le b-a + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$

$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})| \le \underbrace{L(P,f)}_{L(f) \to \text{nezávisí od } P} \le b-a + \mathrm{Var}_a^b f$

$\mathrm{Var}_a^b f \le L(f) \le b-a + \mathrm{Var}_a^b f$

! $L(f)$ - konečná → $\mathrm{Var}_a^b f$ - konečná

$\mathrm{Var}_a^b f$ - konečná → $L(f)$ - konečná

Def: $M \subset \mathbb{R}$ reálna priamka

I - ohraničený interval (dohoda)

Množina $M \subset \mathbb{R}$ má mieru 0 (Lebesqueovu) ($|M|=0$), ak pre každé $\varepsilon>0$ existuje postupnosť intervalov $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, $I_n=(a_n, b_n)$, $|I_n| = |b_n-a_n|$ tak, že $\underbrace{M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$

M je pokrytá intervalmi

Pr. Každá spočítateľná množina má Lebesqueovu mieru 0:

$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ - spočítateľná množina

→ ukážeme podľa def., že $|M|=0$:

↳ každý bod obalíme intervalom: $x_n \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = I_n$

platí: $x_n \in I_n$, $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$$|I_n| = \frac{2\cdot\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}} \qquad \blacksquare$$

Pr. existuje aj nespočítateľná množina s Lebesqueovou mierou 0. dôkaz: (teda konštrukcia takej množiny):

↳ daná množina nemôže obsahovať interval!

↳ bude veľmi "deravá" - Cantorovo discontinuum: (Cantorova konštrukcia)

celý interval vynechávame: → $I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$: $|I_{11}| = \underline{\frac{1}{3}}$

→ $I_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ $I_{22} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$: $|I_{21}| = |I_{22}| = \frac{1}{9} = \underline{\frac{1}{3^2}}$

→ $I_{31} = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$ $I_{32} = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$

$I_{33} = \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ $I_{34} = \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ $|I_{3i}| = \underline{\underline{\frac{1}{3^3}}}$

$\vdots$

→ $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{n2^{n-1}}$: $|I_{ni}| = \underline{\underline{\frac{1}{3^n}}}$

↳ dĺžka vynechaných v n-tom kroku: $\frac{2^{n-1}}{3^n}$

↳ celkom krok od 1 do ∞: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$ - geometrický rad

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \underline{1}$$ - vynechali sme intervaly dĺžky $\underline{1}$.

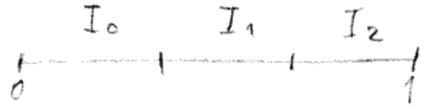
12.

→ t. j. čo nám ostalo je množina miery 0.

? ale čo nám tam vlastne ostalo ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \qquad a_n = 0, 1, 2$$

3-adické rozvoje čísla



↳ ak $\underbrace{1.a_n}_{a_1} = 0$ ⇒ sme v intervale I_0, ak $a_1 = 1$ ⇒ I_1, ak $a_1 = 2$ ⇒ I_2

↳ my sme v našej konštrukcii vyhodili I_1 ⇒ $a_1 \neq 1$, potom $a_2 \neq 1$, ...

↳ pre nás je $a_n = 0 \vee a_n = 2$

$\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)}_{\text{postupnosť z 0 a 2}} = (0, 2, 0, 0, \dots, 2, \dots)$ → tieto čísla padnú do Cantorovho diskontinua,

rôzne postupnosti 0 a 2 vyjadrujú rôzne čísla

↳ postupností 0 a 2 je nespočítateľne veľa: $2^{\aleph_0} = c$

⇒ máme nespočítateľnú množinu miery 0 = Cantorovo diskontinuum. ∎

→ nás zaujíma diferencovateľnosť monotónnej funkcie:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ → nemusí vôbec existovať

– v každom bode zavedieme 4 čísla:

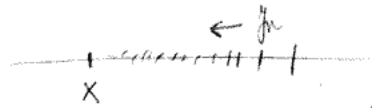
- $D^+ f(x) = \limsup_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ → limes superior

  $D_+ f(x) = \liminf_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ → limes inferior

  $D^- f(x) = \limsup_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

  $D_- f(x) = \liminf_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

- $y_n \to x$ $\quad y_{n+1} < y_n$

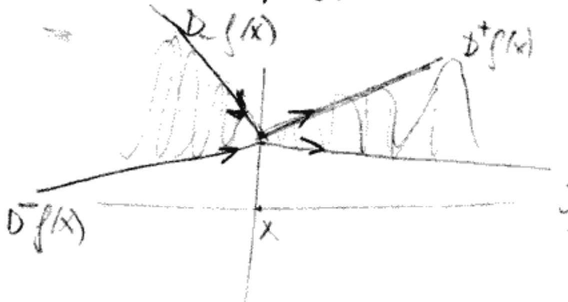


$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \to L_y(x)$ → akási limita, ktorá závisí od postupnosti (y_n)

- ak má f v x deriváciu, tak L je jednoznačné a nezávisí od (y_n)

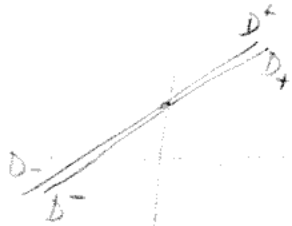
$D^+f(x) = \sup_y L_y(x)$ = limsuperior, $\inf_y L_y(x)$ = lim inf = $D_+ f(x)$?

↳ to sme čiastočne spravili pre x (zľava analogicky)



D – smernice grafu funkcie

- ak $\exists$ deriváciu konečnú v x $\Rightarrow$ $D^+ = D_+ = D^- = D_-$



14. Dirichletova funkcia:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$V = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$: $y > x$ ak $y \in \mathbb{Q}$ $\xrightarrow{\lim}$ $V = 0$ $\boxed{D^+ f(x) = 0}$

ak $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\rightarrow$ $V < 0$ $V = \dfrac{0 - 1}{(y - x)_{>0}}$

$\lim V = -\infty$

$\boxed{D_+ f(x) = -\infty}$

Denjoy, Young (pani :)), Saks: → najvšeobecnejšia formulácia vety 21.4.2005

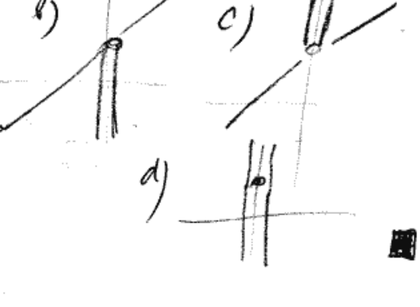
Veta DYS: Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom s výnimkou množiny E nulovej Lebesgueovej miery nastane v každom $x \in \mathbb{R} - E$ jeden z nasledujúcich prípadov:

a) $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$ (teda v ňom $\exists$ konečnú deriváciu)

b) $D^+f(x) = D_-f(x)$, $D_+f(x) = -\infty$, $D^-f(x) = +\infty$

c) $D_+f(x) = D^-f(x)$, $D^+f(x) = +\infty$, $D_-f(x) = -\infty$

d) $D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty$, $D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty$



Lebesgueova miera nulová ↑

14.

Veta: (Lebesgue) ak $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónna, tak (*)

dôkaz: nech f - neklesajúca $\Rightarrow$ $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ pre $\forall x, y$

$\Downarrow$

$D^+, D_+, D^-, D_- \geq 0$!

$\Rightarrow$ môže nastať len situácia aj z Vety DTS

4 existencia konečnej derivácie

(*) množina $A_f \subset \mathbb{R}$ všetkých bodov, v ktorých nie je f diferencovateľná má Lebesgueovu mieru 0.

Veta: Nech $E \subset \mathbb{R}$ má Lebesgueovu mieru nula. Potom existuje funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že nie je v žiadnom $x \in E$ diferencovateľná.

dôkaz: $E \subset \mathbb{R}$, $|E| = 0$ (Lebesgueova miera je 0)

$\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $n = 1, 2, \dots$ $\exists$ postupnosť intervalov $(I_{nk})_{k=1}^{\infty}$ $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk}$

$|E| = 0$ $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{nk}| < \frac{1}{2^n}$

$\to$ usporiadať mi $\forall I_{nk}$ (cez n aj cez k)

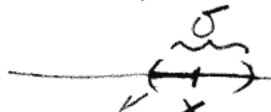
$I_{11} I_{12} \dots I_{1k} \dots$

$I_{n1} \dots I_{nk} \dots$

(po usporiadaní) $\longrightarrow (I_m)_{m=1}^{\infty}$

$\Downarrow$

$\sum_{m=1}^{\infty} |I_m| < 1 \Leftarrow \begin{cases} \sum |I_{1k}| < \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \sum |I_{nk}| < \frac{1}{2^n} \end{cases}$



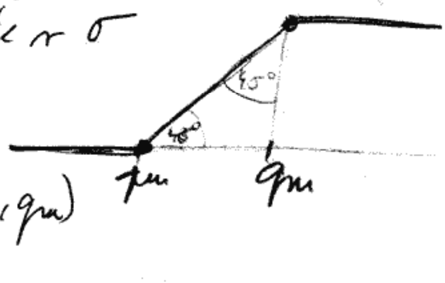
tak okolie δ, presahuje interval I_m

$x \in E$ $\Rightarrow$ dokážem nájsť ľubovoľne prvých intervalov I_m takých, že $x \in I_{m_i} \subset \delta$ okolie $i = 1, \dots, n$

$\to$ existuje nekonečne veľa intervalov obsahujúcich σ

Zoberme si: $f_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad I_m = (p_m, q_m)$

$f_m(x) = \begin{cases} 0 & x \leq p_m \\ x - p_m & x \in I_m = (p_m, q_m) \\ q_m - p_m & x \geq q_m \end{cases}$



definujeme $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

je definovaná na $\forall$ reálnych číslach (lebo $\forall f_m$ je def. na $\mathbb{R}$)

$|f_m(x)| \le |I_m|$

platí: [redacted] $\to$ <u>f je konvergentná</u>

$$\Downarrow$$

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m < 1$$

f_m - neklesajúca pre $\forall m = 1, \dots, \infty \Rightarrow$ <u>f - neklesajúca</u> (zrejme)

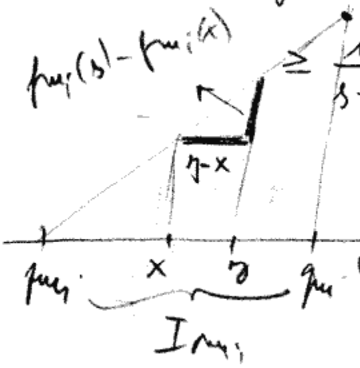
$x \in E \qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \to$ toto ideme skúmať:

~~(x, y)~~ vyberieme si m intervalov, ktoré obsahujú x a ich spoločné okolie: (a nutne intervalové sčítať)

I_m: urobíme prienik: $y = I_{m_1} \cap I_{m_2} \cap \dots \cap I_{m_M}$

$$x<y: \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x} \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) - \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \right) = \frac{1}{y-x} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{(f_m(y) - f_m(x))}_{\ge 0} \ge$$

$\hookrightarrow x<y \wedge f$ - neklesajúca $\Rightarrow$ pre $\forall m$: $f_m(y) - f_m(x) \ge 0$



$$\ge \frac{1}{y-x} \cdot \sum_{i=1}^{M} \left(f_{m_i}(y) - f_{m_i}(x) \right) = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_{m_i}(y) - f_{m_i}(x)}{y-x} = M$$

vynechali sme čo veľa nezáporných sčítancov, teda Σ je menšia

a toto je ľubovoľne zväčšujeme

nemôže byť f v x diferencovateľná ■ :-)

<u>nová látka</u>: normovaný lineárny priestor

! X - nejaký lineárny priestor nad $\mathbb{R}$ (to $\| \ \|$ je norma!)

$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ nazveme normou, ak:

1) $\|x\| \ge 0$, pričom $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x \in \Theta$ (nulový vektor) $\quad x \in X$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Ak na X máme funkciu, ktorá každé $x \in X$ priradí podľa daných 3 vlastností $\Rightarrow$ tá funkcia je norma.

16.

Def: Lineárny priestor spolu s normou sa nazýva lineárny normovaný priestor.

<u>príklad</u>: $p=1$: $l_1 = \{x=(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < +\infty\}$ $\sum|x|$ - absolútne konvergentný

normovaný lineárny priestor

$x=(x_n),\ y=(y_n) \Rightarrow x+y=(x_n+y_n)$ → je tiež absolútne konvergentný lebo

$\sum|x_n+y_n| \le$

lineárny priestor $\Leftarrow$ $\le \sum|x_n| + \sum|y_n|$

definujeme normu:

$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ⇒ má splnené všetky 3 vlastnosti

↳ p: $l_p = \{\dots \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < +\infty\} \Rightarrow \underbrace{\|x\|_p}_{} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

pre $\forall p \ge 1$ je to <u>norma</u>

↳ ak $p,q \ge 1$: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ⇒ p,q - asociované

ak $x \in l_p$ a $y \in l_q$ ⇒ $\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \le \|x_p\| \cdot \|y_q\|$ → <u>Hölderova nerovnosť</u>!

(ak $p=q=2$ ⇒ Cauchyho nerovnosť)

• určujeme funkcie: $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$: $\operatorname{Var}_a^b f < +\infty$

$BV = \{f : \operatorname{Var}_a^b f < +\infty\}$ → BV-lineárny vekt. priestor

zadáme tento priestor takto funkcií normou:

$\|f\| = |f(a)| + \operatorname{Var}_a^b(f)$

vlastnosti: $\|\cdot\|: BV \to \mathbb{R}$

1) $|f(a)| \ge 0$ a $\operatorname{Var}_a^b(f) < +\infty$ → nezáporné ⇒ $\|f\| \ge 0$

ak $f \equiv 0$ ⇒ $\operatorname{Var}_a^b f = 0 \wedge |f(a)| = 0$ ⇒ $\|f\| = 0$

ak $\|f\| = 0$ ⇒ oba sčítance sú nulové ✓

2) $\|\alpha f\| = |\alpha \cdot f(a)| + \operatorname{Var}_a^b(\alpha f)$

$$\operatorname{Var}_a^b(\alpha f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\alpha f(x_i) - \alpha f(x_{i-1})|}_{|\alpha|\,|f(x_i)-f(x_{i-1})|} = |\alpha| \cdot \underbrace{\sup \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|}_{\operatorname{Var}_a^b f}$$

$\to \quad \|\alpha f\| = |\alpha|\cdot|f(a)| + |\alpha|\cdot \operatorname{Var}_a^b(f) = |\alpha|\cdot\|f\|$ ✓

3. $\|f+g\| = |f(a)| + |g(a)| + \underbrace{\operatorname{Var}_a^b(f) + \operatorname{Var}_a^b(g)}_{\geq}$

$\|$

$|(f+g)(a)| + \operatorname{Var}_a^b(f+g)$

$\vdots$ ∎

Veta: Nech $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný priestor. Potom funkcia $\varrho: X\times X \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom: $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ je metrikou na X.

Dôkaz: <u>metrika</u>: 1. $\varrho(x,y)\geq 0$ splnené, $\varrho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$\Downarrow$

$\|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=\bar{0} \Leftrightarrow x=y$ ✓

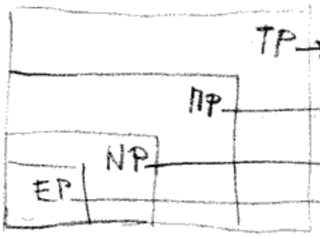
2. $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$ ✓

$\varrho(x,y)=\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\cdot\|y-x\| = \|y-x\| = \varrho(y,x)$

3. trojuholníková nerovnosť:

$\varrho(x,y) = \|x-y\| = \|x-y-z+z\| = \|\underbrace{x-z}+\underbrace{z-y}\| \leq$

$\leq \|x-z\|+\|z-y\| = \varrho(x,z)+\varrho(z,y)$ ✓ ∎



TP → topologické

MP → metrické → ľubovoľný lineárny MP

NP → normované nie je normovaný 28.4.2005

EP → euklidovské

lineárny priestor L:

$f: x,y \to (x,y)$ = skalárny súčin ; $f: L\times L \to \mathbb{R}$

x,y – 2 vektory z L

1) $(x,y)=(y,x)$

2) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$

3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

4) $0 \leq (x,x) < \infty$, $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\bar{0}$

! <u>Def.</u> lineárny priestor na ktorom je definovaný skalárny súčin je eukl. pr.

$\Downarrow$ f – <u>skalárny súčin</u>

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ → toto bude norma (ešte dokážeme)

euklidovský priestor je definovaný pomocou skalárneho súčinu

18.

Schwarz – Cauchy – Bunjakovskij: SCB nerovnosť:

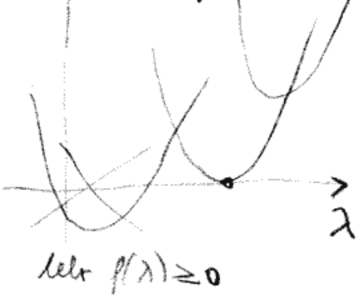
Veta: (SCB) V Euklidovskom priestore platí: $|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|$,

kde $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$. — skalárny súčin

dôkaz: uvažujme funkciu f: $f(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) \ge 0$

$$f(\lambda) = \lambda^2 (x,x) + 2\lambda (x,y) + (y,y) \ge 0$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 \cdot \|x\|^2 + 2\lambda (x,y) + \|y\|^2 \ge 0$$



→ má 1 dvojnásobný koreň alebo žiadne reálne korene ⇒ $D \le 0$

lebo $f(\lambda) \ge 0$

$$4(x,y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$$

$$|(x,y)| \le \|x\|\|y\| \quad \blacksquare$$

Veta: Každý euklidovský priestor je normovaný, ak $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

$\|a\|$ – norma: 1. $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$ ✓

overíme, že je to norma

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$

$$\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda|\cdot\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\cdot\|x\| \checkmark$$

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \le$$

$$\le \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \checkmark \quad \blacksquare$$

príklad. $x = (x_k)_1^\infty$, $y = (y_k)_1^\infty$ → postupnosti pre ktoré platí: $\sum_1^\infty x_k^2 < +\infty$, $\sum_1^\infty y_k^2 < +\infty$

nech $\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^\infty x_k^2 < +\infty\} = l_2$ je tzv. štandardný Hilbertov priestor

definujeme pravidlo: $(x,y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \cdot y_k$ (platia 4 vlastnosti skalárneho súčinu)

treba najprv preveriť, či $\sum x_k \cdot y_k$ konverguje:

využijeme Cauchy-Bolzanovu podmienku:

$$\sum_{k=1}^\infty y_k \text{ konverguje} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{\substack{m,n>n_0 \\ m>n}} : |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

Cauchy - Bolzano Schwarz

teda: $|x_{m+1}y_{m+1} + \dots + x_n y_n| \le \underbrace{\sqrt{\sum_{k=m+1}^{n} x_k^2}}_{<\varepsilon} \cdot \sqrt{\sum_{k=m+1}^{n} y_k^2} < \varepsilon$

$< \varepsilon$ pri istej voľbe m, n

Schwarzova podmienka (nerovnosť)

→ z C-B podmienky ⇒ vyplýva, že $\sum x_k y_k$ je konvergentný.

overujeme vlastnosti skalárneho súčinu:

$(x_1+x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ✓

$(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ ✓

$(x, x) \ge 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$ ✓ → splnené podm.

→ l_2 je euklidovský priestor ∎

príklad: $C(a,b)$ – spojité funkcie na (a,b)

$\|f\| = \sup_{x\in(a,b)} \{|f(x)|\}$ $\rho(f,g) = \|f-g\|$

$(f,g) = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$ → ukážeme, že je to skalárny súčin:

→ je to konečné reálne číslo ✓

→ komutatívnosť ✓

→ ostatné vlastnosti sú jasné ✓

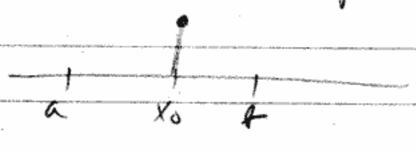
4. $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$

⇐ – jasné sporom:

⇒: $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$: $\exists x_0 \in (a,b): f(x_0) \ne 0 \to f^2(x_0) > 0$

$\Downarrow$

$f \equiv 0$



spojitosť: zvolíme $\varepsilon = \frac{f^2(x_0)}{2}$, $\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \to |f^2(x) - f^2(x_0)| < \varepsilon$

funkcie f^2 (lebo f je spojitá)

$\frac{f^2(x_0)}{2} < f^2(x) < \frac{3}{2} f^2(x_0)$

ak: $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \to f^2(x) > \frac{f^2(x_0)}{2}$

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f^2(x_0)}{2}\,dx = 2\cdot\delta\cdot\frac{f^2(x_0)}{2} > 0 \to \text{spor}$$

$\Rightarrow f \equiv 0$ ∎

majme $(E, \|\cdot\|)$: $+: E\times E \to E$

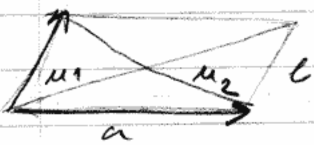
$\cdot : \mathbb{R}\times E \to E$

ak $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} x_n + y_n \to x+y$ aby bola spojitá +

ak $\left.\begin{array}{l} \lambda_n \to \lambda \\ x_n \to x \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda_n x_n \to \lambda x$ tak aby bola tiež spojitá $\cdot$

$\underbrace{(\cdot,\cdot)}_{\text{skalárny súčin}} : E\times E \to \mathbb{R}$ – je to spojitá funkcia?

ukážeme, že nie každá norma sa dá vyjadriť pomocou skalárneho súčinu:



$|u_1|^2 + |u_2|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$
4 rovnobežníkova rovnosť

! $L: \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{?}{=} 2\cdot\|x\|^2 + 2\|y\|^2 : P$

$L: (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) + (x,x) - 2(x,y) + (y,y) =$
$= 2(x,x) + 2(y,y) = 2\cdot\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = P$

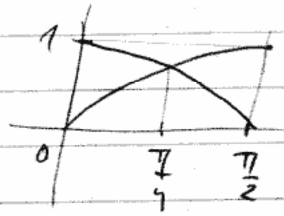
Veta: v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí rovnobežníková rovnosť.

platí: ak máme normovaný priestor, kde platí rovnobežníkové pravidlo pre normu, tak norma sa dá vyjadriť pomocou skalárneho súčinu $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ normovaný priestor je euklidovský $\Leftrightarrow$ norma spĺňa rovnobežníkové pravidlo

príklad: normovaný priestor, ktorého norma nespĺňa rovn. pravidlo $\Rightarrow$
$\to$ nie je euklidovský

$C(0, \frac{\pi}{2})$, $\|f\| = \max\limits_{x\in(0,\frac{\pi}{2})} \{|f(x)|\}$

$f(x) = \sin x$
$g(x) = \cos x$



$\left.\begin{array}{l} \|f(x)\| = 1 \\ \|g(x)\| = 1 \end{array}\right\} \to P: 4$

$L: \underbrace{\|\sin x + \cos x\|^2} + \|\sin x - \cos x\|^2$

nájdeme max $\sin x + \cos x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$:

$\cos x - \sin x = 0$

$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4}}} \Rightarrow \|\sin x + \cos x\|^2 = \underline{\underline{2}}$

$(\sin x - \cos x)' = \cos x + \sin x = 0$

$\sin x = -\cos x$ — na $(0, \frac{\pi}{2})$ nemá lokálne extrémy, teda overíme krajné body

$\|\sin x - \cos x\|^2 = 1$

$\Rightarrow$ $2+1 \neq 4$ $\Rightarrow$ nesplňa rovnobežníkové pravidlo

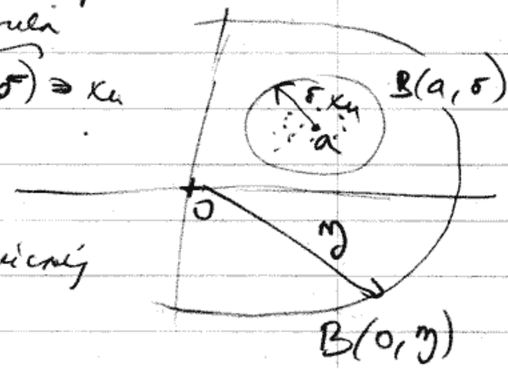
$\Rightarrow$ je normovaný a nie je euklidovský ■

→ ak $x_n \to a$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow$ $\exists \overbrace{B(a,\delta)}^{\text{guľa}} \ni x_n$

ak $x_n \in E$ $\quad x_n \in B(\vec{0}, \eta)$

↳ začiatok súradnicovej sústavy

?



→ pre normu platí:

1) $\big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a \pm b\|$!

$\|a\| = \|a-b+b\| \le \|a-b\| + \|b\|$

$$\left.\begin{array}{l} \|a\| - \|b\| \le \|a-b\| \\ \|b\| - \|a\| \le \|b-a\| = \|a-b\| \end{array}\right\} \Rightarrow \big|\|a\| - \|b\|\big| \le \|a-b\| \checkmark$$

$x_n \in B(a,\delta) \Rightarrow \|x_n - a\| < \delta \qquad x_n \in B(0,\eta)$

$\delta > \|x_n - a\| \ge \|x_n\| - \|a\| \qquad \|x_n - 0\| < \eta$

$\|x_n\| < \underbrace{\|a\| + \delta}_{\eta} \longleftrightarrow \|x_n\| < \eta$

$\Rightarrow$ ∀ konvergentnú postupnosť vieme uzavrieť do gule s polomerom η

22. Skalárny súčin

majme $(E, (\cdot,\cdot))$ 5.5.2005

a) $+ : E \times E \to E$

b) $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$

c) $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$

Veta: V Euklidovskom priestore sú operácie súčtu, skalárneho násobku a skalárneho súčinu spojité.

máme 2 postupnosti: x_n, y_n : $x_n \to x$, $y_n \to y$ $\Big\} \xrightarrow{\text{spojitosť skalárneho súčinu}} (x_n, y_n) \to (x, y)$

dôkaz:

a) $(*) \|x_n + y_n - (x+y)\|$ → chceme ukázať, že to je dostatočne malé, keď $(*)$ je malé

$$\|x_n + y_n - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 \quad \text{ak } n \to \infty$$

b) $\alpha_n \to \alpha$ $x_n \to x$ ... $\underbrace{\alpha_n x_n \to \alpha x}$

$$\|\alpha_n \cdot x_n - \alpha \cdot x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha x\| =$$

$$= |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\| \leq \underset{\text{čísla}}{M} \cdot \underbrace{\|x - x_n\|}_{\to 0} + \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} \cdot \|x\| \to 0$$

$|\alpha_n| \leq M$

α_n - reálna konvergentná postupnosť → ohraničená

využívali sme len vlastnosti normy → platí to aj v normovanom priestore

c) $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leq$

$\leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| =$

$= |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \underset{\leq M}{\|x_n\|} \cdot \underset{\to 0}{\|y_n - y\|} + \underset{\to 0}{\|x_n - x\|} \cdot \|y\| \to 0$

Schwarzova nerovnosť: $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

platí (minule): $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$

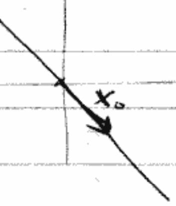
$$\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$ → $\exists M : \|x_n\| \leq M$ pre $\forall n$ ∎

→ nerieme či tiež D, ale D je podpriestor
→ normovaný priestor (tiež aj metrický)

$D \subset E$ ↓ nepr.: $D = \{x : x = \alpha . x_0\} \subset \mathbb{R}^2$
↳ podpriestor

chceme určiť nejaké vlastnosti D



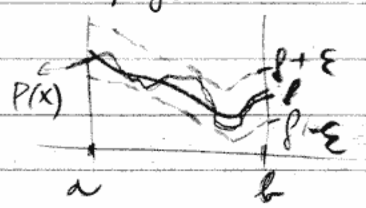
$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$
↓
D - uzavreté, riedke (lebo komplement je otvorený)

nech uvažujem tiež $D \subset \mathbb{R}^2$ (okrem samotného $\mathbb{R}^2$)

príklad:
$C\langle a,b\rangle$ $\quad \|f\| = \max_{x \in \langle a,b\rangle}\{|f(x)|\}$
↓
normovaný priestor

$P \subset C\langle a,b\rangle$
všetky polynómy (je to podpriestor)
↳ hustá (vďaka Weierstrass)

• Weierstrassova veta o aproximácii funkcie polynómom:



$\exists P(x) : |P(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$
⇓
množina ∀ polynómov je hustá v $C\langle a,b\rangle$
↳ $\|f - P\| < \varepsilon$

príklad:
$l_1 = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$
$D \subset l_1$
$D = \{x \in l_1 :$ [redacted] $\exists n(x) : \forall n > n(x) : x_n = 0\}$
↳ D má konečný počet nenulových členov
↳ D - podpriestor
D - hustá v l_1

lebo $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ $\left(\Rightarrow \|x-y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|\right)$, máme $\varepsilon > 0$ ľub.

ukážeme, že $B(x,\varepsilon) = \{y : \|x-y\| < \varepsilon\}$
v ňom aspoň B sa nachádza prvok $\in D$:

vyberme také m: $\sum_{n>m}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (+ zvyšok po m-tom člene je $< \frac{\varepsilon}{2}$).
$n = m+1$

definujme: $y_n = x_n$ pre $n \le m$, $y_n = 0$ pre $n > m$ $\Rightarrow y = (y_n) \in B$ (lebo sme to tak definovali)

24.

$$\|x-y\| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n| = \sum_{n=m+1}^{\infty}|x_n-y_n| + \sum_{n=1}^{m}\underbrace{|x_n-x_n|}_{0} =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty}|x_n-y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \to y_n\in B \Rightarrow$$

$\Rightarrow D$ je hustá ■ (D nie je uzavretý)

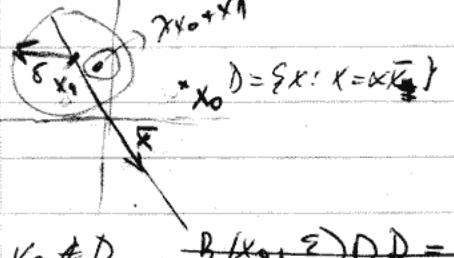
(lebo hustý + uzavretý = celý priestor)?

2. $D=\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ $\quad D_k=\{x\in l_1 : \forall x_m = 0\}$ → prvých k súradníc je nenulových
(asi že D je 1. kategórie) $m>k$

Veta: Nech D je vlastný uzavretý podpriestor normovaného priestoru E. Potom D je riedkou množinou v E.

dôkaz: $\exists$ bod z E mimo D → celé jeho okolie je mimo

↓ ukážeme, že každá guľa obsahuje guľu disjunktnú s D.

pr. 

→ $x_0\notin D$, ~~$B(x_0,\varepsilon)\cap D=\emptyset$~~ (tú guľu $B(x_0,\varepsilon)$ vôbec nepotrebujeme) zoberme $x_1\in D$, $B(x_1,\delta)$ — ukážeme, že v $B(x_1,\delta)$ je guľa disjunktná s D:

(najprv vhodne pretransformujeme x_0 ~~aj s jeho guľou~~ do gule $B(x_1,\delta)$)

→ x_0 vynásobíme λ tak, aby $\|\lambda x_0\|<\delta$ → dostatočne malá norma

→ potom posunieme

$\lambda x_0 + x_1 \in B(x_1,\delta)$ lebo: $\|\lambda x_0+x_1-x_1\| = \|\lambda x_0\| < \delta$

a pritom $\lambda x_0+x_1 \notin D$

sporom: nech $\lambda x_0+x_1 = y\in D$ → $\lambda x_0 = \underbrace{y}_{\in D} - \underbrace{x_1}_{\in D} \in D$ →

$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}(y-x_1)\in D$ → spor (s predpokladom že $x_0\notin D$)

$\Rightarrow \lambda x_0+x_1\notin D$ → $\lambda x_0+x_1 \in \bar{D}$ - otvorená množina $\Rightarrow$

→ λx_0+x_1 dokážeme obaliť dostatočne malým okolím $B(\lambda x_0+x_1,\eta)$, aby padlo do $B(x_1,\delta)$ a nepretínalo D.

$$B(\lambda x_0 + x_1, \eta) \subset B(x_1, \delta) \wedge B(\lambda x_0 + x_1, \eta) \cap D = \emptyset$$

príklad: $\to l_1 = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$, $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

↳ lineárny priestor

tento ničel sme robili za normu

$\to C(a,b) = \{f : f - \text{spojité}\}$, $\|f\| = \max_{x \in \langle a,b \rangle} \{|f(x)|\}$ } máme 2 normy

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$

otázka:

máme len lineárny priestor E;

? existuje norma na E, aby sa z E stal normovaný priestor ?

! áno ! :-) (lineárny priestor je možné normovať)

ale treba využiť axiómu výberu:

už sa mi nechce písať, nejak sa nesústredím ...

E - lin. priestor; $x_1, \dots, x_n$ - LN $\in E$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}_{x_1, \dots, x_n - LN}$

(v konečnej množine)

↳ LN rozšírime na nekonečné množiny:

$B \subset E$ je LN $\Leftrightarrow$ každá jej konečná podmnožina je LN

↳ utvorme systém $\mathcal{D} = \{D \subset E : D - \text{lineárne nezávislá}\}$

$\mathcal{D} \subset \underbrace{\mathcal{P}(E)}_{\text{systém } \forall \text{ podmnožín}}$

$(\mathcal{D}, \subset)$ - ČUM a platí len: $\mathcal{D}^* = $ reťazec v $\mathcal{D}$

$\Downarrow$

$\mathcal{D}^*$ je ohraničený v nejakom prvku $D \in \mathcal{D}$.

nejak to vyzerá na axiómu výberu ← (ale mi sa nechcelo dopísať pred)

B je maximálna v $\mathcal{D}$, B - bude báza $\Longrightarrow$

Veta: Nech E je lineárny priestor. Potom v ňom existuje maximálna (vzhľadom na inklúziu) lineárne nezávislá množina.

$\Rightarrow \forall x \in E \; \exists x_1, \dots, x_n \in B$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ $\}$: $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$

↳ jednoznačne

26.

B: $x \in B \Rightarrow x = x$

$x \notin B \Rightarrow$ uvažme $B \cup \{x\}$

není LN (neboť B je max. LN) $\Rightarrow B \cup \{x\}$ − LZ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ konečná podmnožina, která je LZ (a ta obsahuje x) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{x, x_1, \dots, x_n\}$ − LZ $\Rightarrow \exists \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \bar{0} \ \wedge \ \exists \lambda_i \neq 0$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$$

jednoznačnost:

$\Downarrow$ tak je to jednoznačné vyjádření

nechť tedy: $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

$x = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_m y_m$

uvažme: $\{\underset{z_1}{x_1}, \dots, \underset{z_n}{x_n}, y_1, \dots, y_m\} \Rightarrow z_k \quad k = 1, \dots, r$

$\Rightarrow x = \gamma_1 z_1 + \dots + \gamma_r z_r$

$x = \delta_1 z_1 + \dots + \delta_r z_r$

$$\bar{0} = (\gamma_1 - \delta_1) z_1 + \dots = \sum_{k=1}^{r} (\gamma_k - \delta_k) \underset{\in B}{z_k}$$

$\Downarrow$

$\gamma_k = \delta_k$ pro $\forall k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rovnají se i původní: $\alpha_i = \beta_i$.

$\Rightarrow$ dokázali jsme, že $\forall x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ jednoznačně.

další: $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ − je norma.

(tj. jsme v libovolném lineárním prostoru dostali normu) ■

zkoušky: 18.5. 8:30

19.5. 8:30

2.6. 8:30

9.6. 8:30

23.6. 8:30

30.6. 8:30